1. **Chaîne de Markov (homogène)**.
On a un modèle avec trois états: en santé (s), malade (m), décédé (d).
La matrice des probabilités de transition est la suivante:

$$Q = \begin{array}{c} \\ s \\ m \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} s & m & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.95 & 0.04 & 0.01 \\ 0.45 & 0.5 & 0.05 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

lignes : état initial

colonnes : état final

$M(t)$: état au temps t

Une personne est **présentement en santé (état *s*)**. donc $M(0) = s$ → état "s" (en santé) au temps $t = 0$.

a) Trouver la probabilité qu'elle soit malade (état m) au temps *t* = *1* (Pr(M(1) = m | M(0) = s).
b) Trouver la probabilité qu'elle soit en santé (état s) au temps t = 2. (Pr(M(2) = s | M(0) = s)
c) Trouver la probabilité qu'elle soit décédée (état d) au temps t = 3. (Pr(M(3) = d | M(0) = s)
d) Trouver la probabilité que la personne décède au cours de la deuxième année.

Q^{ij} : probabilité de passer de l'état i à l'état j.

${}_kQ^{ij}$: probabilité de passer de l'état i à l'état j en k étapes.

"homogène", car la probabilité de transition ${}_kQ^{ij}$ ne dépend pas du temps.

---

a) $Pr(M(1)=m \mid M(0)=s) = \boxed{Q^{sm} = 0.04}$

b) $Pr(M(2)=s \mid M(0)=s) = {}_2Q^{ss} = Q^{ss}Q^{ss} + Q^{sm}Q^{ms}$

$= 0.95(0.95) + 0.04(0.45)$

$= \boxed{0.9205}$

c) $Pr(M(3)=d \mid M(0)=s) = {}_3Q^{sd} = Q^{ss}Q^{ss}Q^{sd} + Q^{ss}Q^{sm}Q^{md} +$
$Q^{ss}Q^{sd}Q^{dd} + Q^{sm}Q^{mm}Q^{md} +$
$Q^{sm}Q^{ms}Q^{sd} + Q^{sm}Q^{md}Q^{dd} +$
$Q^{sd}Q^{dd}Q^{dd}$

$= 0.95(0.95)(0.01) + 0.95(0.04)(0.05) +$
$0.95(0.01)(1) + 0.04(0.5)(0.05) +$
$0.04(0.45)(0.01) + 0.04(0.05)(1) +$
$0.01(1)(1)$

$= \boxed{0.033605}$

*voir aussi la 2e méthode.

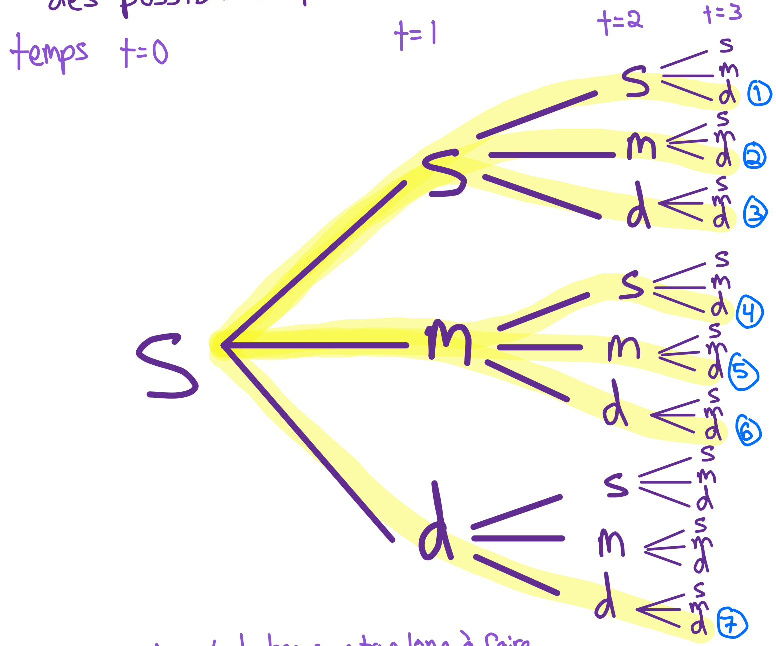
d) $Q^{ss}Q^{sd} + Q^{sm}Q^{md}$

$= 0.95(0.01) + 0.04(0.05)$

$= \boxed{0.0115}$ → prob. de décéder au cours de la 2e année.

D'autres méthodes

c) Si on a de la difficulté à trouver tous les chemins possibles, on peut faire un arbre des possibilités pour visualiser les chemins possibles.



$$_3Q^{sd} = \overbrace{Q^{ss}Q^{ss}Q^{sd}}^{①} + \overbrace{Q^{ss}Q^{sm}Q^{md}}^{②} + ③\,Q^{ss}Q^{sd}Q^{dd} + ⑤\,Q^{sm}Q^{mm}Q^{md} + ④\,Q^{sm}Q^{ms}Q^{sd} + ⑥\,Q^{sm}Q^{md}Q^{dd} + ⑦\,Q^{sd}Q^{dd}Q^{dd}$$

Par contre, c'est beaucoup trop long à faire...

---

c) 2e méthode : $_3Q = Q \cdot Q \cdot Q$

$_2Q_{ss}$ (réponse du b))

$$_2Q = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.04 & 0.01 \\ 0.45 & 0.5 & 0.05 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.95 & 0.04 & 0.01 \\ 0.45 & 0.5 & 0.05 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9205 & 0.058 & 0.0215 \\ 0.6525 & 0.268 & 0.0795 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$_3Q^{sd}$ (réponse du c))

$$_3Q = {}_2Q \cdot Q = \begin{bmatrix} 0.9205 & 0.058 & 0.0215 \\ 0.6525 & 0.268 & 0.0795 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.95 & 0.04 & 0.01 \\ 0.45 & 0.5 & 0.05 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.900575 & 0.06582 & 0.033605 \\ 0.740475 & 0.16010 & 0.099425 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Plus long, mais moins de chances d'oublier des chemins possibles.

---

d) 2e méthode

Décès au cours de la 2e année = (Nombre décédé à t=2) − (Nombre décédé à t=1)

$$= {}_2Q^{sd} - Q^{sd}$$

$$= 0.0215 - 0.01$$

$$\boxed{= 0.0115}$$

fin

XXL MathTutor