- Trouver le taux d'int.
  - taux d'int. composé vs taux nominal

(Secondaire 5 et université)

Taux d'intérêt implicite

Exemple : · J'emprunte 100 000$.
· Je dois rembourser 125 000$ dans 5 ans.
· Trouver le taux implicite.

$C_n = C_i(1+i)^n$

n : nb de périodes (nb d'années dans ce cas)

$125\,000 = 100\,000(1+i)^5$

$\boxed{i = 4.56\%}$

↳ taux implicite.
↳ taux d'int. composé annuellement.
↳ taux d'int. effectif.

↳ si tu voulais plutôt trouver le taux d'int. composé a) semestriellement ou b) mensuellement...

① Tu veux "transformer" ton "n" pour qu'il aille la même unité de temps sous entendu dans le taux d'int. "i".

$C_n = 125\,000\$$
$C_o = 100\,000\$$

a) $i_{semestriel}$ donc $n = 5 \text{ ans} \times \frac{2 \text{ semestres}}{\text{an}} = 10$ semestres.

$C_n = C_o(1+i)^n$
$125\,000 = 100\,000(1+i)^{10}$
$(1.25)^{1/10} - 1 = i$
$\Rightarrow \boxed{i_{semestriel} = 2.2565\%}$

---

note : si tu avais voulu trouver le taux nominal semestriel, tu aurais
(université) utilisé la formule : $C_n = C_o\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mt}$

$125\,000 = 100\,000\left(1+\frac{i^{(2)}}{2}\right)^{2(5)}$

$\Rightarrow \boxed{i^{(2)} = 4.513\%}$

↳ a du sens, car on sait que

$\boxed{\frac{\text{taux nominal } i^{(m)}}{m} = \text{taux d'int. comp. m fois par an.}}$

en effet,

$\frac{i^{(2)}}{2} = \frac{4.513\%}{2} = 2.2565\%$

$i^{(m)} = i^{(2)}$: taux nominal semestriel

m : nb de fois par année
(ex : semestriel ⇒ m=2 ; mensuel ⇒ m=12)

t : nb d'année

mt = n
m : nb de fois par année
t : nb d'années
n : nb de périodes au total

nb périodes total = (nb de fois par année) * (nb d'années)

---

b) $i_{mensuel}$

$n = m \cdot t = \frac{12 \text{ mois}}{1 \text{ an}} * 5 \text{ ans} = 60$ mois

$C_n = C_o(1+i)^n$

$125\,000 = 100\,000(1+i)^{60}$

$\boxed{i_{mens.} = 0.3726\%}$

---

bonus : taux nominal mensuel : 2 choix pour le trouver...

Méthode 1 : $\frac{i^{(m)}}{m} = i \Rightarrow \frac{i^{(12)}}{12} = 0.3726\%$

$\Rightarrow i^{(12)} = 4.47\%$

Méthode 2 : $C_n = C_o\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mt}$

$125\,000 = 100\,000\left(1+\frac{i^{(12)}}{12}\right)^{12(5)}$

$\Rightarrow \boxed{i^{(12)} = 4.47\%}$

(Université)

Taux d'intérêt nominal vs effectif

$r = \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m - 1$

i : taux nominal
r : taux effectif
m : nb de période dans l'année

exemple : Le taux d'int. nominal mensuel est de 5%. Trouver le taux d'int. effectif.

$r = \left(1+\frac{0.05}{12}\right)^{12} - 1$

$\boxed{r = 5.12\%}$

Analyse: Un taux d'intérêt nominal composé mensuellement de 5% est plus grand qu'un taux effectif de 5% puisque des intérêts sont accumulés sur les intérêts perçus à la fin de chaque mois.

Note: Si on retirait l'intérêt reçu à la fin de chaque mois, les taux seraient équivalents puisqu'on ne ferait pas d'intérêts sur les intérêts

Type de périodes et valeurs de n

Intérêts composés...	Valeur de n
annuellement	1
semestriellement	2
trimestriellement (aux 3 mois ; 4 fois par année)	4
mensuellement	12
quotidiennement	365
continûment	∞

Taux d'intérêt composé continûment

$\boxed{\delta = \ln(1+r)} \Rightarrow r = e^{\delta} - 1$

δ : taux d'int. comp. continûment.
ou δ : force d'intérêt.
r : taux d'int. effectif

$\boxed{i^{(\infty)} = \delta}$

Exemple: Le taux d'intérêt composé continument est de 9%. Trouver le taux d'intérêt effectif.

$0.09 = \ln(1+r)$

$\boxed{r = 9.417\%}$

Note : on pourrait aussi trouver la réponse en utilisant la formule précédente

$\boxed{r = \left(1+\frac{i}{n}\right)^n - 1}$

avec un grand n. ex : n = 10 000

$r = \left(1+\frac{0.09}{10\,000}\right)^{10\,000} - 1$

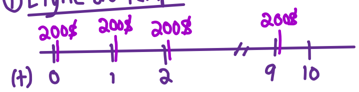
$\boxed{r = 9.417\%}$

Calculer la valeur actuelle de paiements en début de période

*De manière logique (sans apprendre de formules par coeur).

exemple: On paie 200$ à chaque début d'année pendant 10 ans. Trouver la valeur actuelle des paiements sachant que le taux d'int. est $i = 4\%$.

① Ligne du temps



② "Créer" la formule

V.A. : Valeur actualisée

$$V.A. = 200 + 200(1.04)^{-1} + 200(1.04)^{-2} + \ldots + 200(1.04)^{-9}$$

$$= 200 \sum_{k=0}^{9} (1.04)^{-k}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}}$$

↳ condition: $|a| < 1$

$$= 200 \sum_{k=0}^{9} \left(\frac{1}{1.04}\right)^k$$

$$= 200\left(\frac{1-a^{10}}{1-a}\right) \qquad a = \frac{1}{1.04}$$

$$= 200(8.4353)$$

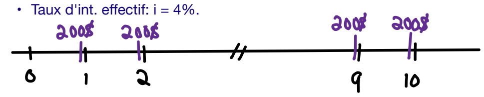
$$\boxed{= 1687.07\$}$$

Interprétation:
Payer 1687,07$ aujourd'hui serait équivalent à payer 200$ en début d'année pendant 10 ans si le taux d'int. effectif était de 4%.

Calculer la valeur actuelle de paiements en fin de période

Reprenons l'exemple précédent, mais au lieu de payer 200$ en début de période, on les paye en fin de période.

- 10 paiements de 200$ en fin d'année.
- Taux d'int. effectif: i = 4%.



$$V.A. = 200(1.04)^{-1} + 200(1.04)^{-2} + \ldots + 200(1.04)^{-10}$$

$$= 200 \sum_{k=0}^{9} 1.04^{-k-1}$$

↳ Note: On veut s'arranger pour que notre $k=0$ pour pouvoir appliquer la formule:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^n}{1-a}}$$

$$= 200(1.04)^{-1} \sum_{k=0}^{9} \left(\frac{1}{1.04}\right)^k \qquad a = \frac{1}{1.04}$$

$$= 200(1.04)^{-1}\left(\frac{1-a^{10}}{1-a}\right)$$

$$= 200(1.04)^{-1}(8.4353)$$

$$\boxed{= 1622.18\$}$$

Remarques:

- Payer 1622,18$ aujourd'hui = payer 200$ en fin d'année pendant 10 ans.
- Si on doit faire les paiements en fin de période, payer aujourd'hui est moins "cher" que de payer aujourd'hui si les paiements étaient dûs en début de période. Ça a du sens puisque...
  - On se rappelle que payer 1622.18$ est équivalent à payer 2000$ sur 10 ans (200$ par année en fin d'année).
    - Pourquoi? À cause du taux d'int. de 4% et la banque reçoit son argent plus rapidement (donc ça te coûte "moins cher").
  - On comprend donc le concept que payer plus rapidement fait en sorte qu'on "paie moins au final".
    - C'est exactement ce qui différencie les paiements en fin de période et ceux en début de période.
    - Paiements en fin de période:
      - La banque s'attendait à recevoir 0$ aujourd'hui (ne rien recevoir avant 1 an, car le premier paiement est dans 1 an).
      - On la paye tout de suite alors elle est "contente" et ça revient "moins cher".
    - Paiement en début de période:
      - La banque s'attendait à recevoir 200$ aujourd'hui.
    - Bref, la banque est "plus contente" lorsqu'on paye tout aujourd'hui alors qu'elle s'attendait à recevoir 0$ aujourd'hui (paiements en fin de période) que si elle s'attendait à recevoir 200$ aujourd'hui.
  - C'est donc ce qui explique pourquoi la valeur actualisée des paiements en fin de période est plus petite que la valeur actualisée des paiements en début de période (par un facteur de (1+i)^{-1}).
    - (V.A. début p.) * (1.04)^{-1} = (V.A. fin p.)

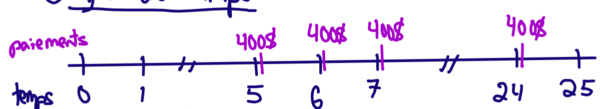
Paiements annuels différés et sommation Σ

Remarque à propos des sommes

Avec de l'expérience et de la pratique, on devient meilleur pour trouver la somme et faire en sorte qu'elle va de *k=0* à *n*.
Par contre, il peut être intéressant de savoir comment jouer avec la somme (si par exemple on met un indice de k=1 ou autre).

Exemple : On paie 400$ par année en début de période pendant 20 ans, mais le premier paiement se fait dans 5 ans. ($i_{annuel} = 5\%$)

① ligne du temps



② Écrire la somme $\rightarrow$ valeur actualisée au temps t=0.

$$V.A. = 400(1.05)^{-5} + 400(1.05)^{-6} + \ldots 400(1.05)^{-24}$$

$$\left(\text{avec de l'expérience}\right) = 400\sum_{k=0}^{19} 1.05^{-k-5}$$

$$(\text{intuitivement}) = V.A. = 400\sum_{k=5}^{24} 1.05^{-k}$$

on veut k=0 pour pouvoir utiliser la formule $\boxed{\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}}$

$$* \Rightarrow V.A. = 400\sum_{k=5-5}^{24-5} 1.05^{-(k+5)}$$

$$= 400\sum_{k=0}^{19} 1.05^{-k-5}$$

$$= 400(1.05)^{-5}\sum_{k=0}^{19}\left(\frac{1}{1.05}\right)^k$$

$$= 400(1.05)^{-5}\left(\frac{1-a^{20}}{1-a}\right)$$

$a = \frac{1}{1.05}$

$$= 400(1.05)^{-5}(13.085)$$

$$\boxed{= 4101.08\$}$$

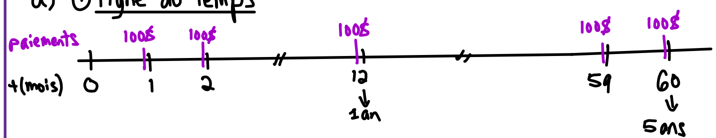
Exemple plus complexe

Concepts:

- taux d'int. nominal
- taux d'int. effectif
- paiements récurrents fin de période
- valeur actualisée
- sommation
- Compréhension de la valeur actualisée

Charles vient de s'acheter une voiture. Il doit payer 100$ à chaque fin de mois pendant les 5 prochaines années. Le taux d'intérêt *effectif* est de 5%.
a) Quelle est la valeur actualisée de ses paiements?
b) Charles se dit qu'il devra payer un total de 6000$ au cours des 5 prochaines années. Il se croit fûté et propose donc au vendeur de payer 5500$ aujourd'hui au lieu de faire des paiements mensuels. Le vendeur accepte sans hésiter. Charles a-t-il pris une bonne décision? Qui est avantagé dans cette situation?

a) ① ligne du temps



② Trouver le taux d'int. mensuel

$1 + i_{annuel} = (1 + i_{mensuel})^{12}$

$1.05 = (1 + i_{mens})^{12}$

$\boxed{i_{mens} = 0.4074\%}$

Vérification (ça a du sens??)
est-ce que 1000$ accumulé à 5% annuel est pareil que 1000$ accumulé à 0.4074% mensuel?

$1000(1.05) = 1000(1.004074)^{12}$

$1050 = 1050$ ✓ oui!

(inutile pour le problème)

$\boxed{r = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m - 1}$

r: taux d'int. effectif
i: taux d'int. nominal
m: nb de périodes par année

$0.05 = \left(1 + \frac{i^{(12)}}{12}\right)^{12} - 1$

$\boxed{i^{(12)} = 4.89\%}$ ↳ taux nominal mensuel

③ Trouver la valeur actualisée

$V.A. = 100(1+i)^{-1} + 100(1+i)^{-2} + \ldots + 100(1+i)^{-60}$ $\quad i = i_{mens} = 0.407\%$

$= 100 \sum_{k=0}^{59} (1.00407)^{-k-1}$

$= 100(1.00407)^{-1} \sum_{k=0}^{59} \left(\frac{1}{1.00407}\right)^k$ $\quad \boxed{\sum_{k=0}^{k} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}}$

$= 100(1.00407)^{-1} \left(\frac{1 - a^{60}}{1 - a}\right)$ $\quad a = \frac{1}{1.00407}$

$= 100(1.00407)^{-1}(53.35)$

$\boxed{= 5313.38\$}$

Résumé des formules

$r = \left(1 + \frac{i}{n}\right)^n - 1$

$\delta = \ln(1 + r)$

$C_n = C_0(1+i)^n$

$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$

OMG!

$\div 12$

taux nominal mensuel $\Rightarrow$ taux d'int. mensuel

4.89% $\xrightarrow{\div 12}$ 0.407%

Taux nominal

C'est un taux qui est facilement divisable pour trouver le taux d'int. composé.
Exemple:

- Taux nominal semestriel de 8%,
  - Alors taux d'int composé semestriellement = 4%.
- Taux nominal mensuel de 6%,
  - Alors taux d'int composé mensuellement de 0.5%.

r: taux d'int. effectif
$i^{(m)}$: taux d'int. nominal
i: taux d'int. composé par période

$r = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m - 1$

$r = (1 + i)^m - 1$

$\frac{i^{(m)}}{m} = i$

Obligations

Calculer le prix d'une obligation (donc la valeur actualisée V.A.)

formule (par coeur) =>
$$V.A. = C*\left(\frac{1-(1+i)^{-t}}{i}\right) + V(1+i)^{-t}$$

$$C: \text{Coupon} = \frac{(\text{taux de coupons}) * \overbrace{(\text{Valeur nominale})}^{V}}{(\text{nb de coupons par année})}$$

exemple : coupons semestriels : $C = \frac{(10\%)(1000\$)}{2} = 50\$$

i : taux d'int. composé par période

V : Valeur nominale (par défaut, $V = 1000\$$)

t : nombre de coupons à verser.

exemple : coupons semestriels pendant 20 ans, alors 40 coupons.

Exemple: Calculer la valeur (le prix) d'une obligation qui verse des coupons annuellement pendant 20 ans, avec un taux de coupon de 2% et un taux de rendement exigé de 4%.

Méthode 1 : logique

Compréhension...

L'obligation verse des coupons de valeur "C" en fin d'année à chaque année. À la fin de la dernière année, l'obligation verse aussi la valeur nominale de V$.

$$V.A. = \left(C(1+i)^{-1} + C(1+i)^{-2} + \ldots + C(1+i)^{-20}\right) + V(1+i)^{-20}$$
$$= C\sum_{k=0}^{19}(1+i)^{-k-1} + V(1+i)^{-20}$$
$$= C(1+i)^{-1}\sum_{k=0}^{19}\left(\frac{1}{1+i}\right)^{k} + V(1+i)^{-20}$$

→ $V = 1000\$$ par défaut.

- $C = \frac{(\text{taux coupons}) * (V)}{\text{nb de coupons par année}}$

$C = \frac{(2\%)(1000)}{1}$

$\boxed{C = 20\$}$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}}$$

$a = \frac{1}{1.04}$

- $i = 4\%$

$$V.A. = 20(1.04)^{-1}\left(\frac{1-a^{20}}{1-a}\right) + 1000(1.04)^{-20}$$
$$= 20(1.04)^{-1}(14.13) + 456.39$$
$$= 271.81 + 456.39$$
$$\boxed{= 728.19\$}$$

Méthode 2 : formule par coeur

$$V.A. = C\left(\frac{1-(1+i)^{-t}}{i}\right) + V(1+i)^{-t}$$

$V = 1000\$$ par défaut

$C = \frac{(\text{taux coupon}) * V}{\text{nb de coupon par année}}$

$= \frac{(2\%)(1000)}{1}$

$\boxed{= 20\$}$

$i = 4\%$

$t = 20$

$$V.A. = 20\left(\frac{1-(1.04)^{-20}}{0.04}\right) + 1000(1.04)^{-20}$$
$$= 20(13.59) + 456.39$$
$$\boxed{= 728.19\$}$$

Exemple : obligations

- Des obligations ont été émises il y a 10 ans.
- Le taux de coupon est de 10%.
- La valeur nominale est de 1000$.
- L'échéance lors de l'émission de l'obligation était de 30 ans.
- Le taux de rendement nominal semestriellement exigé est de 8%.

On cherche le prix actuel (valeur actuelle) d'une de ces obligations.

Formule (par coeur) : $C*\left(\frac{1-(1+i)^{-t}}{i}\right) + V(1+i)^{-t}$

- $V = 1000\$$
- $t = \underbrace{(30-10)}_{20 \text{ ans}}\underbrace{(2)}_{\substack{2 \text{ fois par année} \\ \text{(semestriellement)}}}$

$\boxed{t = 40}$

- $C = \frac{(\text{taux coupon})(V)}{\text{nb coupons par année}} = \frac{(10\%)(1000\$)}{2}$

$\boxed{= 50\$}$

- $i = 4\%$

$i = \frac{i^{(2)}}{2} = \frac{8\%}{2} = 4\%$

int. nominal sem.

int. comp. sem.

(au temps $t=10$)

$$V.A. = C\left(\frac{1-(1+i)^{-t}}{i}\right) + V(1+i)^{-t}$$

$$= 50\left(\frac{1-(1.04)^{-40}}{0.04}\right) + 1000(1.04)^{-40}$$

$$= 989.64 + 208.29\$$$

$$\boxed{= 1197.93\$}$$