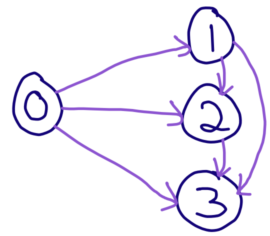
**Chaînes de Marvov en temps continu**

On a un modèle markovien avec 4 états: actif (0), malade (1), invalide permanent (2), et décédé (3).
On connaît les forces de transition suivantes:

$$\mu^{01}_{x+t} = 0.04 \qquad \mu^{12}_{x+t} = 0.06$$
$$\mu^{02}_{x+t} = 0.02 \qquad \mu^{13}_{x+t} = 0.015$$
$$\mu^{03}_{x+t} = 0.01 \qquad \mu^{23}_{x+t} = 0.25$$




Les autres forces de transition sont nulles.

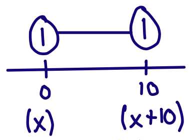
a) Trouver la probabilité que Méganne soit malade au temps 10 si elle est actuellement malade (1) et qu'elle a *x* ans.

b) Trouver la probabilité qu'Hercule soit invalide permanent (2) au temps 10 s'il est actuellement malade (1) et qu'il a *x* ans.

c) Trouver la probabilité que Thierno tombe malade (1), puis décède (3) (et ce, sans devenir invalide permanent (2)) au cours des 10 prochaines années s'il est actuellement actif (0) et qu'il a *x* ans.

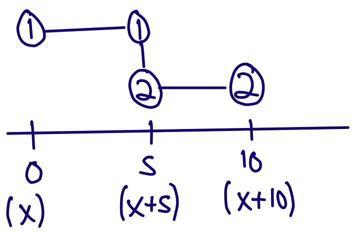
$$\boxed{{}_tp_x^{ii} = e^{-\int_0^t \sum_{j=0,\, j\neq i}^{n} \mu^{ij}_{x+s}\,ds}}$$

a)




$$
\begin{aligned}
{}_{10}p_x^{11} &= e^{-\int_0^{10}(\mu^{12}_{x+y} + \mu^{13}_{x+y})dy} \\
&= e^{-\int_0^{10}(0.06 + 0.015)dy} \\
&= e^{-\int_0^{10} 0.075dy} \\
&= e^{-[0.075y]_0^{10}} \\
&= e^{-(0.075(10) - 0.075(0))} \\
&= e^{-0.75} \\
&= 0.4723665553 \\
&\boxed{\approx 0.4724}
\end{aligned}
$$

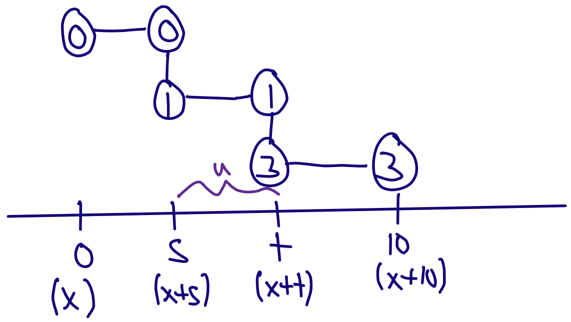
b)




$$\boxed{{}_uP_x^{01} = \int_{t=0}^{u} \left({}_tP_x^{\overline{00}}\right)\left(\mu^{01}_{x+t}\right)\left({}_{u-t}P^{\overline{11}}_{x+t}\right) dt}$$

$$
\begin{aligned}
{}_{10}P_x^{12} &= \int_0^{10} {}_sP_x^{\overline{11}}\, \mu^{12}_{x+s}\, {}_{10-s}P^{\overline{22}}_{x+s}\, ds \\
&= \int_0^{10} e^{-\int_0^s \left(\mu^{12}_{x+y} + \mu^{13}_{x+y}\right) dy} (0.06)\, e^{-\int_0^{10-s} \mu^{23}_{x+s+y}\, dy}\, ds \\
&= \int_0^{10} e^{-\int_0^s (0.06 + 0.015)\, dy} (0.06)\, e^{-\int_0^{10-s} 0.25\, dy}\, ds \\
&= \int_0^{10} e^{-[0.075y]_0^s} (0.06)\, e^{-[0.25y]_0^{10-s}}\, ds \\
&= 0.06 \int_0^{10} e^{-0.075s}\, e^{-0.25(10-s)}\, ds \\
&= 0.06 \int_0^{10} e^{-0.075s}\, e^{-2.5} e^{0.25s}\, ds \\
&= 0.06 e^{-2.5} \int_0^{10} e^{0.175s}\, ds \\
&= 0.06 e^{-2.5} \left. \frac{e^{0.175s}}{0.175} \right]_0^{10} \\
&= \frac{0.06 e^{-2.5}}{0.175} \left( e^{1.75} - 1 \right) \\
&= 0.133810819 \\
&\boxed{\approx 0.1338}
\end{aligned}
$$

c)




$$\int_0^{10} {}_{s}p_x^{\overline{00}}\, \mu_{x+s}^{01} \int_0^{10-s} {}_{u}p_{x+s}^{\overline{11}}\, \mu_{x+s+u}^{13}\, {}_{10-s-u}p_{x+s+u}^{\overline{33}}\, du\, ds$$

$$= \int_0^{10} e^{-\int_0^s (\mu^{01}_{x+y}+\mu^{02}_{x+y}+\mu^{03}_{x+y})dy} (0.04) \int_0^{10-s} e^{-\int_0^u (\mu^{12}_{x+s+y}+\mu^{13}_{x+s+y})dy} (0.015) \cancelto{=1}{e^{-\int_0^{10-s-u} 0\, dy}}\, du\, ds$$

$$= \int_0^{10} e^{-\int_0^s (0.04+0.02+0.01)dy} (0.04) \int_0^{10-s} e^{-\int_0^u (0.06+0.015)dy} (0.015)\,(1)\, du\, ds$$

$$= 0.04(0.015) \int_0^{10} e^{-\int_0^s 0.07 dy} \int_0^{10-s} e^{-\int_0^u 0.075 dy}\, du\, ds$$

$$= 0.04(0.015) \int_0^{10} e^{-0.07y\big]_0^s} \int_0^{10-s} e^{-0.075\big]_0^u}\, du\, ds$$

$$= 0.04(0.015) \int_0^{10} e^{-0.07s} \int_0^{10-s} e^{-0.075u}\, du\, ds$$

$$= 0.04(0.015) \int_0^{10} e^{-0.07s} \frac{e^{-0.075u}}{-0.075}\Big]_0^{10-s}\, ds$$

$$= \frac{0.04(0.015)}{-0.075} \int_0^{10} e^{-0.07s}\left(e^{-0.075(10-s)} - 1\right) ds$$

$$= \alpha \int_0^{10} e^{-0.07s}\left(e^{-0.75} e^{0.075s} - 1\right) ds$$

$$= \alpha \left( \int_0^{10} e^{0.005s} e^{-0.75} ds - \int_0^{10} e^{-0.07s} ds \right)$$

$$= \alpha \left( e^{-0.75} \frac{e^{0.005s}}{0.005}\Big]_0^{10} - \frac{e^{-0.07s}}{-0.07}\Big]_0^{10} \right)$$

$$= \alpha \left( \frac{e^{-0.75}}{0.005}\left(e^{0.05} - 1\right) + \frac{1}{0.07}\left(e^{-0.7} - 1\right) \right)$$

$$\boxed{\alpha = \frac{0.04(0.015)}{-0.075} = -0.008}$$

$$= \alpha(-2.347888)$$

$$= 0.018783106$$

$$\boxed{\approx 0.01878}$$